Nombres Complexos i Funcions Variable Complexa

$$\boxed{\mathbb{C} = \{\, z = a + b \cdot \mathrm{i} \quad | \quad a, b \in \mathbb{R} \,\}}$$

- $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ és la unitat imaginària (i.e., $\mathrm{i}^2 = -1$).
- Si $z = a + b \cdot \mathrm{i} \in \mathbb{C}$:
  - $a = \mathrm{Re}(z)$ és la part real de $z \in \mathbb{C}$.
  - $b = \mathrm{Im}(z)$ és la part imaginària de $z \in \mathbb{C}$.
- Si $z_j = a_j + b_j \cdot \mathrm{i}$, $j = 1, 2$, la suma i producte en $\mathbb{C}$ són:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 \cdot \mathrm{i}) + (a_2 + b_2 \cdot \mathrm{i}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot \mathrm{i},$$

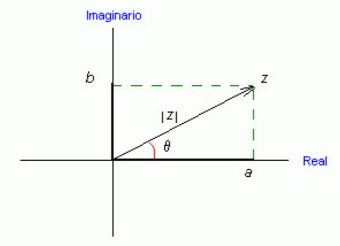
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 \cdot \mathrm{i}) \cdot (a_2 + b_2 \cdot \mathrm{i}) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_1 + b_1 a_2) \cdot \mathrm{i}.$$

- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ és un cos commutatiu.
- Si $z = a + b \cdot \mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el nombre invers de z és:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot \mathrm{i}.$$

- Si $z = a + b \cdot \mathrm{i} \in \mathbb{C}$, llavors:
  - $\bar{z} = \overline{a + b \cdot \mathrm{i}} = a - b \cdot \mathrm{i}$ és el nombre complex conjugat de z.
  - $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ és el mòdul de z.

- Si $z, w \in \mathbb{C}$, llavors es compleix:
  - **(i)** $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$; **(ii)** $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$; **(iii)** Si $z \neq 0$: $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$;
  - **(iv)** $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$ **(v)** $z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ (imaginari pur) $\iff \bar{z} = -z$
- **Exercici:** Si $z_j = a_j + b_j \cdot \mathrm{i}$, $j = 1, 2$, llavors:
  - $\mathrm{Re}(\bar{z}_1 \cdot z_2) = \langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle$.
  - $\mathrm{Im}(\bar{z}_1 \cdot z_2) = \det((a_1, b_1), (a_2, b_2))$.
- Introduïm el pla complex identificant $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ via l'equivalència $\mathbb{C} \ni z = a + b \cdot \mathrm{i} \approx (a, b) \in \mathbb{R}^2$:



- Si $z \neq 0$, el seu argument és $\arg(z) = \theta \equiv$ angle format pel vector (a, b) amb el semi-eix real positiu ($\arg(z)$ funció multi-valuada definida mòdul 2π). E.g.: $\arg(1) = 0$, $\arg(-1) = \pi$, $\arg(\mathrm{i}) = \pi/2$.

- L'argument d'un nombre complex compleix:

$$\begin{aligned} \arg(z\cdot w) &= \arg(z)+\arg(w) \\ \arg(z/w) &= \arg(z)-\arg(w) \\ \arg(\bar{z}) &= -\arg(z) \end{aligned}$$

(i.e., si triem determinacions concretes de $\arg(z)$ i $\arg(w)$, obtenim determinacions de $\arg(z\cdot w)$, $\arg(z/w)$ i $\arg(\bar{z})$.)

- La notació $z = r_\theta$ s'anomena la forma polar de $z \in \mathbb{C}$, on $r = |z|$ (mòdul) i $\theta = \arg(z)$ (argument).
  (Si $z = 0 \implies r = 0$, però l'argument està indefinit.)
- Les relacions bàsiques entre la forma (rectangular) $z = a + b\cdot \mathrm{i}$ d'un nombre complex i la seva forma polar $z = r_\theta$ són:

$$z = r\cdot(\cos\theta + \mathrm{i}\cdot \sin(\theta)), \quad r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

- Si $z = r_\theta$, $z_j = (r_j)_{\theta_j}$, $j = 1, 2$, llavors:

$$z_1\cdot z_2 = (r_1\cdot r_2)_{\theta_1+\theta_2}, \quad z_1/z_2 = (r_1/r_2)_{\theta_1-\theta_2}, \quad \bar{z} = r_{-\theta}, \quad z^{-1} = (1/r)_{-\theta}$$

- Usant la fórmula d'Euler per l'exponencial d'un nombre complex, podem introduïr la notació exponencial de $z \in \mathbb{C}$:

$$z = r_\theta = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r \cdot (\cos\theta + \mathrm{i} \cdot \sin(\theta)).$$

- Si $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $z_j = r_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}$, $j = 1, 2$, llavors:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \cdot r_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}, \qquad z_1/z_2 = (r_1/r_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}, \\ \bar{z} &= r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \qquad z^{-1} = (1/r)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}. \end{aligned}$$

- La forma polar/exponencial de $z = r_\theta = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, permet calcular fàcilment les seves n arrels n-èsimes $\{w_k\}_{k=0,\ldots,n-1}$:

$$w^n = z \iff w = w_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

- Les arrels n-èsimes $\{w_k\}_{k=0,\ldots,n-1}$ de $z \neq 0$ determinen un poligon regular de n costats centrat en el zero.
  E.g., les arrels cinquenes de $z = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ formen un pentagon regular de vèrtexs: $w_0 = \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/20}$, $w_1 = \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{9\mathrm{i}\pi/20}$, $w_2 = \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{17\mathrm{i}\pi/20}$, $w_3 = \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4}$ i $w_4 = \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{33\mathrm{i}\pi/20}$.

- A partir del mòdul en $\mathbb{C}$ introduïm la distància euclídea en $\mathbb{C}$:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

- La distància d en $\mathbb{C}$ és idèntica a la distància euclídea entre els corresponents elements de $\mathbb{R}^2$ definits via la identificació $\mathbb{C} \ni z = x + y \cdot \mathrm{i} \approx (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Per tant, la topologia de l'espai mètric $(\mathbb{C}, d)$ és la mateixa que la usual de $\mathbb{R}^2$.
- $(\mathbb{C}, d)$ és un espai mètric complet, i.e., tota successió de Cauchy en $\mathbb{C}$ (en termes de la distància d) és convergent en $\mathbb{C}$.
- La convergència d'una successió $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + \mathrm{i} \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ equival a la convergència de la seva part real i imaginària:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z = a + \mathrm{i} \cdot b \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \end{cases}$$

- Denotarem el disc/bola obert/a en $\mathbb{C}$ de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ i radi $r > 0$ mitjançant qualsevol de les notacions següents:

$$B(z_0; r) = B_r(z_0) = D(z_0; r) = D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}.$$

- El corresponent disc/bola tancat/da es denotarà per:

$$\bar{B}(z_0; r) = \bar{B}_r(z_0) = \bar{D}(z_0; r) = \bar{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leq r\}.$$

- Denotarem el cercle en $\mathbb{C}$ de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ i radi $r > 0$ com:

$$C(z_0; r) = C_r(z_0) = \partial B_r(z_0) = \partial \bar{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = r\}.$$

- Un *domini* de $\mathbb{C}$ és tot subconjunt $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que Ω és *obert* ($\mathring{\Omega} = \Omega$ en la topologia definida per la distancia d) i *connex*.
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ és una *regió* si el seu interior $\mathring{\Omega}$ és un *domini* ($\Omega = \mathring{\Omega} \cup F$, on $F \subset \partial\Omega$ és una part o bé tota la seva frontera).
- Un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ és *simplement connex* si el complementari de Ω en $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ és un conjunt connex (i.e., si Ω no te cap forat), on $\bar{\mathbb{C}}$ és la compactficació (d'Alexandroff) de $\mathbb{C}$ per un punt.

- Denotarem les funcions complexes de variable complexa com:

$$\begin{array}{rcl} f : \Omega \subset \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) = u(z) + \mathrm{i} \cdot v(z), \end{array}$$

  on u i v denoten les parts real i imaginària de f, respectivament:

$$u = \mathrm{Re}(f), \quad v = \mathrm{Im}(f).$$

- Usant la identificació $\mathbb{C} \ni z = x + y \cdot \mathrm{i} \approx (x, y) \in \mathbb{R}^2$, podem interpretar la funció f com una funció de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \end{array}$$

- Motivat per la identificació de $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, admetrem les següents expressions per f (malgrat "l'abús de notació" que signifiquen):

$$f(z) = f(x + y \cdot \mathrm{i}) = f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i} \cdot v(x, y) = \text{“}f(z, \bar{z})\text{”},$$

- La notació "$f(z, \bar{z})$" per una funció de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ posa de manifest el fet de que si $f(x, y)$ n'és la funció de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ equivalent, llavors si "complexifiquem" (x, y) via la identificació $z = x + y \cdot \mathrm{i}$, el que obtenim (en general) NO és "pròpiament" $f = f(z)$ sinó $f = f(z, \bar{z})$. (Sí bé en general no escriurem $f(z, \bar{z})$ per indicar-la.)

- La relació entre $f(x,y)$ i $f(z)$ s'estableix via les substitucions:

$$\left.\begin{array}{l} z = x + y\cdot\mathrm{i} \\ \bar{z} = x - y\cdot\mathrm{i} \end{array}\right\} \overset{(*)}{\iff} \left\{ x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2\,\mathrm{i}} \right.$$

- P. ex.: Considerem $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per:

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = (x^2+y^2, 2xy),$$

la corresponent funció $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\cdot v(x,y)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 + y^2 + \mathrm{i}\,2xy \\ &\overset{(*)}{=} \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2\,\mathrm{i}}\right)^2 + \mathrm{i}\,2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2\,\mathrm{i}}\right) \\ &= z\,\bar{z} + \frac{z^2-\bar{z}^2}{2}. \end{aligned}$$

- P. ex.: Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és $f(z) = z^2 + \bar{z}^2$, la corresponent funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ és $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = (2x^2 - 2y^2, 0)$, ja que:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= z^2 + \bar{z}^2 \overset{(*)}{=} (x + y\cdot\mathrm{i})^2 + (x - y\cdot\mathrm{i})^2 = 2\,x^2 - 2y^2 \\ &= u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y) \iff u = 2\,x^2 - 2y^2,\ v = 0. \end{aligned}$$

$$f(z) = f(x + y \cdot \mathrm{i}) = f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i} \cdot v(x, y).$$

- Podem calcular les derivades parcials de $f = u + \mathrm{i} \cdot v$ respecte de x, y (si existeixen) com següeix:

$$f_x = \partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = u_x + \mathrm{i} v_x, \qquad f_y = u_y + \mathrm{i} v_y.$$

- En termes de la notació $f(z)$, podem calcular $f_x(z_0)$, $f_y(z_0)$, en $z_0 = a + b \cdot \mathrm{i}$, a partir dels següents límits d'una variable (real):

$$f_x(z_0) = \lim_{x \to a} \frac{f(x + b \cdot \mathrm{i}) - f(a + b \cdot \mathrm{i})}{x - a},$$
$$f_y(z_0) = \lim_{y \to b} \frac{f(a + y \cdot \mathrm{i}) - f(a + b \cdot \mathrm{i})}{y - b}.$$

- Pel que fa referència a z i $\bar{z}$, introduïm els següents *operadors* (en principi formals) per denotar les seves derivades parcials:

$$f_z = \partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(f_x - \mathrm{i}\, f_y), \qquad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + \mathrm{i}\, f_y).$$

- f_z i $f_{\bar{z}}$ surten d'aplicar "formalment" la regla de la cadena

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}f_x + \frac{1}{2\,\mathrm{i}}f_y, \\ f_{\bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}f_x - \frac{1}{2\,\mathrm{i}}f_y. \end{aligned}$$

  (Recordem: $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2\,\mathrm{i}}$.)

- **Exemple/Exercici:** Si $\gamma(t)$ és una corba parametritzada en $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \gamma\ : [a,b] \subset \mathbb{R} &\to \ \mathbb{C} \\ t\quad &\mapsto \gamma(t) = \alpha(t) + \mathrm{i}\,\beta(t) \end{aligned}$$

  llavors $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \mathrm{i}\,\beta'(t)$ és el vector velocitat de $\gamma(t)$ en cada punt (vector tangent a la corba). Si apliquem $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $\gamma(t)$, llavors el vector velocitat de la nova corba $f(\gamma(t))$ és:

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(t))\cdot\overline{\gamma'(t)}.$$

- Les funcions $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *holomorfes / analítiques*, que són les que estudiarem en aquest curs, són aquelles $\mathcal{C}^1$ tals que, un cop expressades com a funció de z, $\bar{z}$, *NO depenen de la variable* $\bar{z}$.
  - $f\in\mathcal{C}^1$ és holomorfa $\iff f_{\bar{z}}=0$.
  - Si f és holomorfa, $f'(z)=f_z(z)$ és la seva **derivada holomorfa**.
- P. ex.: $f=|z|$ NO és holomorfa;
  - $f(z)=|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$.
  - $f_{\bar{z}}=\dfrac{z}{2|z|}=\dfrac{x+\mathrm{i}\,y}{2\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_z=\dfrac{\bar{z}}{2|z|}$.
- P. ex.: $f=x^2-y^2+2\mathrm{i}\,x\,y$ SÍ és holomorfa:
  - $f(z)=x^2-y^2+2\mathrm{i}\,xy=(x+\mathrm{i}\cdot y)^2=z^2$.
  - $f_{\bar{z}}=0,\quad f_z=2\,z$.